PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES
DES CLASSES PRÉPARATOIRES AUX GRANDES ÉCOLES

Objectifs de formation et organisation du programme de MPSI

Objectifs de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Mathématiques et Physique (MP) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale d'un futur ingénieur, enseignant ou chercheur. Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une organisation coordonnée entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions, les énoncés et les démonstrations des théorèmes figurant au programme et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes.

Il est attendu que la pratique du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concoure à la formation de l'esprit des étudiants : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

Les étudiants doivent aussi être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les étudiants des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche, de favoriser la mise en avant des concepts mathématiques sous-jacents et de mettre l'accent sur l'interprétation des résultats obtenus ; il favorise ainsi l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles.

Le programme de première année MPSI propose l'étude des notions de convergence et de comparaison des ordres de grandeur (étude locale), l'étude des propriétés globales des fonctions liées à la continuité ou à la dérivabilité, ainsi que les notions de dimension et de rang en algèbre linéaire et quelques notions indispensables de géométrie euclidienne ; il développe les techniques relatives

- à l'usage des inégalités (accroissements finis, convexité, Taylor-Lagrange, Cauchy-Schwarz, etc.),
- à la pratique des développements limités et leurs applications,
- à l'étude de la convergence ou de la divergence d'une suite, d'une série ou d'une intégrale,
- à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires,
- au calcul matriciel et à celui des déterminants,
- aux calculs polynomiaux,
- à la pratique d'algorithmes divers (algorithmes de Gauss, de Gram-Schmidt, d'Euclide, méthode de Newton, etc.).

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques...) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.

Il est aussi souhaité que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

Organisation du texte du programme

Le programme de première année MPSI est organisé en quatre parties (numérotées I, II, III et IV) ; chaque partie comporte :

- en tête de partie, un bandeau définissant les objectifs essentiels et décrivant sommairement les notions qui y sont étudiées ; il fixe également les méthodes et les techniques que les étudiants doivent maîtriser et savoir mettre en œuvre ;
- un contenu, organisé en sections (numérotées 1, 2, ...), fixant les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- des commentaires donnant des informations sur les acquis des étudiants à l'issue du secondaire, indiquant des repères et quelques notations, et précisant le sens ou les limites à donner à certaines notions ; lorsque c'est jugé utile, et dans un souci d'unification des pratiques des enseignants, les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats y sont précisés.

Étalement de la formation

L'année est divisée en deux périodes ; les parties I et II du programme de première année MPSI sont étudiées en parallèle lors de la première période dont on peut estimer qu'elle couvre le premier trimestre ; les parties III et IV sont ensuite étudiées, également en alternance, durant la seconde période.

Les objectifs majeurs du programme de la première période sont les suivants :

- commencer les cours dans le prolongement des programmes du cycle du baccalauréat scientifique en mettant à profit les connaissances acquises au lycée,
- familiariser les étudiants avec la terminologie française,
- amener les étudiants vers des problèmes effectifs d'analyse ou de géométrie en veillant à développer leur intuition et à leur apprendre à formuler clairement des résultats ou des raisonnements et mettre au point des démonstrations,
- donner les bases mathématiques indispensables à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles),
- éviter des exposés formels plus ou moins dogmatiques et inconsistants.

Programme de la classe de première année MPSI

I - Introduction à l'analyse

Objectifs

L'objectif de cette partie est
– d'amener les étudiants vers des problèmes effectifs d'analyse élémentaire,
– d'introduire les premiers outils nécessaires à l'étude de la physique.
On focalise l'attention sur les applications du calcul infinitésimal à une variable, en évitant de soulever des questions théoriques liées à la topologie de la droite réelle. On s'appuie autant que possible sur les connaissances acquises dans le secondaire.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- *aient une bonne connaissance des fonctions usuelles et soient en particulier capables de se représenter leur graphe, de définir les fonctions trigonométriques réciproques, de manipuler les formules d'addition, d'écrire les développements limités usuels, etc. ;*
- *sachent établir des propriétés simples relatives aux limites ;*
- *maîtrisent la pratique des développements limités et leurs applications au calcul des limites, à l'étude locale des fonctions et des courbes, etc. ;*
- *puissent mener l'étude d'une courbe paramétrée (y compris en coordonnées polaires) ;*
- *aient fait le lien entre l'étude métrique des courbes et la cinématique dans le plan ;*
- *sachent résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre et du second ordre à coefficients constants.*

Contenu

1. Vocabulaire de la théorie des ensembles

- Ensemble, élément d'un ensemble, relation d'appartenance ; partie d'un ensemble, relation d'inclusion ; réunion, intersection, différence, complémentaire.
- Relation d'équivalence. Relation d'ordre.
- Application, fonction ; produit (cartésien), graphe d'une application ; image, antécédent d'un élément ; image directe, réciproque d'une partie ; restriction, prolongement, application induite.
- Injection ; surjection ; bijection, application réciproque.

2. Principe de récurrence

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Principe de récurrence.
- Raisonnements par récurrence.

3. Limites

- Limite en un point d'une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$; limite en $\pm\infty$; limite infinie d'une fonction à valeurs réelles. Limite à gauche / à droite en un point. Opérations sur les limites.
- Continuité en un point, sur un intervalle : définition.

4. Dérivées et primitives

- Nombre dérivé, tangente, fonction dérivée. Formule de Leibniz, dérivée d'une composée de fonctions.
- Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou lisse). Caractérisation d'un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
- Inégalité des accroissements finis. Caractérisation des fonctions à valeurs réelles lisses croissantes ou décroissantes, convexes ou concaves.
- Intégrale d'une fonction continue sur un segment ; propriétés et interprétation géométrique. Inégalité de la moyenne.
- Intégration par parties ; formule de changement de variables.

5. Fonctions usuelles

- Fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
- Exponentielle réelle, logarithme népérien ; fonctions $x \mapsto a^x$, logarithmes de base a $(a > 0)$; fonctions puissances $x \mapsto x^p$ $(p \in \mathbb{R})$.
- Fonctions trigonométriques circulaires, fonctions arctan, arcsin, arccos.
- Fonctions trignométriques hyperboliques, fonctions arctanh, arcsinh, arccosh.
- Fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$; exponentielle complexe.

6. Développements limités

- Notion de développement limité, unicité.
- Formule de Taylor-Young. Développements limités usuels.
- Exemples de calculs de développements limités.

7. Courbes paramétrées planes

- Courbe paramétrée (ou chemin) de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^2$; image d'une courbe paramétrée. Changement de paramétrage, chemins équivalents.
- Point régulier, tangente.
- Étude locale : allure d'une courbe paramétrée en un point régulier ou singulier, branches infinies.
- Propriétés métriques : longueur d'un chemin fini, abscisse curviligne, courbe à paramétrage normal, courbure algébrique, repère et formules de Frenet, rayon de courbure et cercle osculateur en un point birégulier.
- Étude des courbes paramétrées en coordonnées polaires.
- Interprétation cinématique : trajectoire d'un point mobile dans le plan, vitesse, accélération.

8. Équations différentielles

- Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.
- Équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants (dans $\mathbb{C}$) : équation caractéristique, système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, méthode de Lagrange (de la variation des constantes), cas où le second membre est une fonction polynôme-exponentielle, problème de Cauchy.
- Équations différentielles à variables séparées.

Commentaires

1. Vocabulaire de la théorie des ensembles

On suppose les étudiants familiers avec la théorie naïve élémentaire des ensembles. L'objectif est de fixer la terminologie.

3. Limites

Les propriétés élémentaires des limites sont démontrées complètement. On évite l'usage formel des quantificateurs durant la première période de l'année.

4. Dérivées et primitives

Les propriétés des fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle relatives à la dérivation et à l'intégration sur un segment sont supposées connues ; les résultats fondamentaux (inégalité des accroissements finis, caractérisation des difféomorphismes, caractérisation des fonctions croissantes ou convexes, existence de primitives) sont donc rappelés sans démonstration (leur étude systématique sera faite en seconde période de l'année) ; ils sont énoncés avec précision, expliqués au moyen d'arguments heuristiques de nature géométrique ou cinématique et illustrés par de nombreux exemples. Les résultats de nature locale tels que les formules relatives à la dérivation d'un produit ou d'une composée de fonctions sont démontrés.

On ne considère que des fonctions indéfiniment dérivables.

De façon provisoire, on admet que toute fonction à valeurs complexes f définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur I et pour $a, b \in I$, on définit l'intégrale de a à b de f comme l'accroissement de a à b d'une primitive de f.

5. Fonctions usuelles

Les fonctions puissances, l'exponentielle et les fonctions sinus et cosinus sont supposées connues et leurs propriétés rappelées sans démonstration. On en déduit l'étude des autres fonctions usuelles.

Notations internationales standard : exp, ln, cos, sin, tan, cot, cosh, sinh, tanh, coth, arccos, arcsin, arctan.

6. Développements limités

On n'utilise pas les notations de Landau durant la première période de l'année. Les développements limités considérés sont de la forme

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + (c_n + \varepsilon(x))(x-a)^n$$

où ε est une fonction de limite nulle en a. On admet la formule de Taylor-Young sous la forme suivante : si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et a un point de I, alors pour tout entier naturel n, il existe une fonction $\varepsilon_n : I \to \mathbb{C}$ continue (et en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$) et nulle en a telle qu'on ait

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \varepsilon_n(x)(x-a)^n.$$

On expose le calcul des développements limités (somme et produit de fonctions, fonctions composées) à partir d'exemples explicites, en évitant toute présentation systématique. On insiste sur l'estimation des restes ; pratiquement, on écrira par exemple $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \beta(x)x^4$ où β est une fonction continue en 0, plutôt que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon(x)x^2$ où ε est une fonction de limite nulle en 0.

7. Courbes paramétrées planes

On ne considère que des courbes paramétrées de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dans l'étude des branches infinies d'une courbe paramétrée, on met en évidence l'utilisation des développements asymptotiques dans la recherche des directions asymptotiques et des asymptotes et dans l'étude de la position de la courbe par rapport aux asymptotes. On décrit les allures possibles d'une courbe en un point régulier ou singulier à partir d'exemples.

On appelle chemin ou courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ une application γ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$; un tel chemin est dit fini si I est un segment ; des chemins (de classe $\mathcal{C}^\infty$) $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^2$ sont $\mathcal{C}^\infty$-équivalents s'il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme ϕ de I_1 sur I_2, appelé changement de paramétrage, tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$; ils sont équivalents avec même orientation si de plus le changement de paramétrage ϕ est croissant.

Pour aborder l'étude des courbes, il est nécessaire de traiter les parties I et II en alternance .

Il est utile, pratiquement, d'identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire d'utiliser la structure multiplicative de $\mathbb{R}^2$) dans l'étude métrique des courbes paramétrées planes.

Par définition, la longueur d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est $\int_a^b |\gamma'|$; des chemins finis équivalents ont même longueur. Un chemin $\gamma : I \to \mathbb{C}$ est dit normal (ou de paramétrage normal) si $|\gamma'(s)| = 1$ pour tout $s \in I$; tout chemin régulier $\gamma : I \to \mathbb{C}$ est équivalent à un chemin normal $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbb{C}$ et le changement de paramétrage $\sigma : I \to \tilde{I}$ tel que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \sigma$ est appelé abscisse curviligne de γ ; les abscisses curvilignes de γ sont de la forme $\sigma(t) = s_0 \pm \int_{t_0}^t |\gamma'|$, avec $t_0 \in I$ et $s_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un chemin normal ; la courbure algébrique de γ est la fonction $c : I \to \mathbb{R}, s \mapsto \frac{\gamma''(s)}{i\gamma'(s)}$; si $\alpha : I \to \mathbb{R}$ est un relèvement (de classe $\mathcal{C}^\infty$) de γ au sens où $\gamma'(s) = e^{i\alpha(s)}$ pour tout $s \in I$, alors $c = \alpha'$. Le centre de courbure de γ au point $\gamma(s)$ (ou plus exactement au paramètre s) est $\gamma(s) + \frac{\gamma''(s)}{c(s)}$.

On admet le théorème de relèvement suivant : si $\gamma : I \to \mathbb{C}$ est un chemin (de classe $\mathcal{C}^\infty$) ne passant pas par 0, il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in I$.

8. Équations différentielles

Tous les résultats sont démontrés.

L'étude d'équations différentielles à variables séparées est l'occasion de présenter en détail des exemples de recollement de solutions et de recherche de solutions maximales.

II - Introduction à la géométrie

Objectifs

On étudie dans cette partie les systèmes d'équations linéaires à coefficients réels ; les notions fondamentales de l'algèbre linéaire sont introduites d'un point de vue constructif, sur la base de l'algorithme de Gauss. On y aborde d'autre part la géométrie euclidienne en petite dimension, en particulier pour les besoins de la physique et des sciences industrielles, en mettant en avant l'utilisation des nombres complexes et le formalisme de l'algèbre linéaire.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- *soient capable, au moyen de l'algorithme de Gauss, de résoudre un système d'équations linéaires, de déterminer un rang, d'extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs, de compléter une famille libre en une base, d'inverser une matrice carrée ;*
- *aient compris le théorème du rang ;*
- *sachent manipuler les nombres complexes et les utiliser pour résoudre des problèmes de géométrie plane ;*
- *connaissent les déterminants d'ordre 2 ou 3 et leur interprétation géométrique ;*
- *sachent orthogonaliser une famille libre de $\mathbb{R}^d$ au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt et calculer la distance entre deux sous-espaces affines en petite dimension ;*
- *sachent utiliser les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ et les coordonnées cylindriques et sphériques dans $\mathbb{R}^3$;*
- *connaissent les formules usuelles relatives au produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$;*
- *connaissent les coniques et leur intervention dans la description du mouvement à accélération centrale.*

Contenu

1. Sous-espaces vectoriels et affines de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

- Résolution d'un système de n équations linéaires à coefficients réels à p inconnues par la méthode d'élimination de Gauss (algorithme de Gauss) ; inconnues principales , secondaires.
- Matrice à coefficients réels à n lignes et p colonnes ; multiplication des matrices, propriété d'associativité. Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires. Matrice échelonnée, pivots. Matrice carrée inversible, inversion d'une matrice carrée par l'algorithme de Gauss-Jordan.
- Addition et multiplication par un scalaire dans $\mathbb{R}^d$, combinaison linéaire d'une famille finie d'éléments de $\mathbb{R}^d$. Famille finie libre, liée. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{R}^d$ telles $v_1, \ldots, v_p$ s'expriment comme combinaisons linéaires de $(u_1, \ldots, u_n)$ et si p est strictement supérieur à n, alors la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est liée.
- Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ engendré par une famille finie d'éléments de $\mathbb{R}^d$, famille génératrice d'un sous-espace vectoriel. Base d'un sous-espace vectoriel ; tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ admet une base ; toutes les bases d'un sous-espace vectoriel donné comportent le même nombre de vecteurs ; dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. Si une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^d$ est libre (resp. génératrice), alors $n \leqslant \dim F$ (resp. $n \geqslant \dim F$) ; si $n = \dim F$, alors la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de F si et seulement si elle est libre ou génératrice ; coordonnées d'un vecteur de F dans une base de F.
- Rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, d'une matrice, d'un système d'équations linéaires homogènes. Théorème du rang : le rang d'un système d'équations linéaires homogènes est égal au rang de sa matrice, une matrice et sa transposée ont même rang, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à p inconnues de rang r est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ de codimension r (c'est-à-dire de dimension $p - r$).
- Utilisation de l'algorithme de Gauss pour extraire une famille libre maximale d'une famille finie d'éléments de $\mathbb{R}^d$, pour compléter une famille libre d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^d$ en une base de F.
- Sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$; direction d'un sous-espace affine. Obtention des équations paramétriques (resp. cartésiennes) d'un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ donné par un système d'équations cartésiennes (resp. paramétriques).

2. Nombres complexes

- Plan de Gauss. Parties réelle et imaginaire, conjugué, module d'un nombre complexe.
- Résolution algébrique d'une équation du deuxième degré.
- Groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module égal à 1. Arguments d'un nombre complexe ; argument principal ; expression trigonométrique d'un nombre complexe. Formules d'addition, formule de Moivre, formules de duplication, paramétrage rationnel de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Racines de l'unité ; racines n-ièmes d'un nombre complexe pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Étude des similitudes affines réelles de $\mathbb{C}$, de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

3. Déterminants d'ordre 2 ou 3

- Déterminant d'une famille de vecteurs dans la base canonique en dimension 2 ou 3 ; orientation canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$; base directe, indirecte.

– Déterminant d'une matrice ; multiplicativité du déterminant.
– Formules de Cramer pour des systèmes de 2 ou 3 équations.

4. Structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^d$

– Produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$). Relation d'orthogonalité. Inégalité de Cauchy-Schwarz ; norme euclidienne canonique ; théorème de Pythagore ; identités de polarisation ; identité du parallélogramme.
– Famille orthogonale de vecteurs ; toute famille orthogonale dont tous les éléments sont non nuls est libre. Orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F ; la dimension de F est égale à la codimension de $F^\perp$. Orthogonalisation d'une famille libre : algorithme de Gram-Schmidt. Bases orthonormales.
– Déterminant (noté Det) d'une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ calculé dans une base orthonormale. Matrice et déterminant de Gram d'une famille de 2 ou 3 vecteurs. Interprétation géométrique du déterminant de Gram ; aire d'un parallélogramme, volume d'un parallélépipède dans $\mathbb{R}^d$.
– Équation normale d'une droite affine dans $\mathbb{R}^2$, d'un plan affine dans $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces affines perpendiculaires. Projection orthogonale d'un point sur un sous-espace affine. Distance entre deux sous-espaces affines.

5. Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$

– Relation $\overline{z}_1 z_2 = \langle z_1, z_2\rangle + i\,\mathrm{Det}(z_1, z_2)$ pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Angle orienté (déterminé modulo 2π) d'un couple de vecteurs ; relations $\langle u_1, u_2\rangle = \cos\theta\,\|u_1\|\,\|u_2\|$ et $\mathrm{Det}(u_1, u_2) = \sin\theta\,\|u_1\|\,\|u_2\|$ pour $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, θ désignant un angle orienté de (u_1, u_2). Coordonnées polaires ; équation polaire d'une droite. Angle orienté de droites. Relations trigonométriques dans un triangle.
– Équation cartésienne normale d'un cercle dans $\mathbb{R}^2$. Équations paramétriques d'un cercle. Équation polaire d'un cercle passant par l'origine des coordonnées. Détermination d'un cercle par trois points non alignés. Théorème de l'arc capable ; condition nécessaire et suffisante pour que quatre points distincts de $\mathbb{R}^2$ soient alignés ou cocycliques.
– Angle de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Coordonnées cylindriques, sphériques.
– Équation cartésienne normale d'une sphère dans $\mathbb{R}^3$. Équations paramétriques en coordonnées sphériques.
– Produit vectoriel : pour $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, $u_1 \times u_2$ est l'unique vecteur tel que $\langle u_1 \times u_2, v\rangle = \mathrm{Det}(u_1, u_2, v)$ pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$. Caractérisation géométrique du produit vectoriel. Produit mixte, calcul du produit vectoriel dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Identités de Lagrange, du double produit vectoriel.

6. Coniques

– Définition d'une conique par foyer et directrice ; excentricité ; ellipse, parabole, hyperbole.
– Équation cartésienne réduite. Centre, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole.
– Équation polaire d'une conique dont un foyer est l'origine des coordonnées.
– Caractérisation bifocale des ellipses et des hyperboles.
– Paramétrage des ellipses et des hyperboles au moyen des fonction trigonométriques circulaires et hyperboliques.
– Mouvement à accélération centrale, lois de Kepler.

Commentaires

1. Sous-espaces vectoriels et affines de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

La notion d'espace vectoriel n'est introduite qu'en deuxième période de l'année. On aborde l'algèbre linéaire en dimension finie (exclusivement dans $\mathbb{R}^d$) de façon constructive, en partant de la résolution des systèmes d'équations linéaires par l'algorithme de Gauss. Le point de vue est « statique » : les changements de base et les applications linéaires ou transformations affines ne sont pas envisagés ; tous les calculs sont effectués dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

2. Nombres complexes

On définit $\mathbb{C}$ comme le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la multiplication complexe donnée par la formule

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)\ ;$$

en posant $i = (0, 1)$ et en identifiant la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ à $\mathbb{R}$, on retrouve la notation algébrique traditionnelle des nombres complexes et l'on fait apparaître $\mathbb{C}$ comme une extension de corps de $\mathbb{R}$.

4. Structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^d$

L'étude des espaces euclidiens, limitée à celle du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^d$, est fondamentale et définitive en ce qui concerne la première année. Elle est complétée dans la partie IV par l'étude des isométries.

L'aire d'un parallélogramme de $\mathbb{R}^d$ porté par les vecteurs x_1 et x_2 est par définition $\sqrt{\det G(x_1, x_2)}$, où $G(x_1, x_2)$ est la matrice de Gram de (x_1, x_2) ; de la formule $G(x_1, x_2) = {}^tXX$, où X est la matrice de la famille (x_1, x_2) dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^d$, il résulte que si $d = 2$, on a $\sqrt{\det G(x_1, x_2)} = |\mathrm{Det}(x_1, x_2)|$ (la positivité de $\det G(x_1, x_2)$ donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz). De même, l'aire d'un parallélépipède dans $\mathbb{R}^d$ porté par les vecteurs x_1, x_2 et x_3 est $\sqrt{\det G(x_1, x_2, x_3)}$, où $G(x_1, x_2, x_3)$ est la matrice de Gram de (x_1, x_2, x_3) et on a $\sqrt{\det G(x_1, x_2, x_3)} = |\mathrm{Det}(x_1, x_2, x_3)|$ si $d = 3$.

III - Suites et séries - Fonctions d'une variable réelle

Objectifs

Cette partie pose les fondements de l'analyse des fonctions d'une variable réelle ; elle constitue le noyau du programme d'analyse dans les classes préparatoires. Le cadre en reste toutefois élémentaire : la topologie se résume à l'étude des propriétés globales des fonctions continues d'une variable réelle et seule l'intégration des fonctions continues par morceaux est considérée. On se concentre pour une part essentielle sur une pratique effective de l'analyse : étude de la convergence d'une série ou d'une intégrale, du comportement asymptotique d'une suite ou d'une fonction, de diverses techniques de majorations, etc.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- *aient assimilé la propriété de complétude de la droite réelle sous ces différentes formes : principe de la borne supérieure, principe des segments emboîtés, convergence des suites de Cauchy ;*
- *aient appris à utiliser les quantificateurs pour formuler (mettre en formule) certains énoncés et obtenir leur négation ;*
- *aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalités des accroissements finis et de Taylor-Lagrange, inégalité de la moyenne, inégalités de convexité, inégalité de Cauchy-Schwarz, etc.) ;*
- *soient capables de démontrer les propriétés globales des fonctions continues ;*
- *aient une bonne maîtrise du calcul des développements limités ;*
- *sachent établir la convergence ou la divergence d'une série ou d'une intégrale dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une suite ou une fonction positive aux suites ou fonctions de référence ;*
- *connaissent les techniques d'intégration usuelles ;*
- *puissent déterminer le rayon de convergence d'une série entière dans des cas simples ;*
- *aient pratiqué quelques algorithmes de calcul numérique.*

Contenu

1. Nombres réels

- Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$; propriété d'Archimède ; majorant/minorant, plus grand / petit élément, borne supérieure / inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$; principe de la borne supérieure.
- Définition de $\overline{\mathbb{R}}$. Intervalles de $\mathbb{R}$ et de $\overline{\mathbb{R}}$, segments.
- Valeur absolue ; module ; norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$; inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire. Boule ; partie bornée de $\mathbb{R}^d$, application bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

2. Convergence dans $\mathbb{R}^d$

- Notion de suite, de suite extraite. Vocabulaire sur les fonctions. Quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- Limite d'une suite réelle dans $\overline{\mathbb{R}}$; convergence d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$; cas particulier des suites complexes.
- Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I ; cas particulier des fonctions réelles ou complexes. Caractérisation séquentielle des limites.
- Fonction continue, continue à gauche / à droite en un point ; fonction continue sur un intervalle ; fonction continue par morceaux sur un segment.
- Opérations algébriques sur les limites. Composition de limites. $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues à valeurs complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

– La convergence d'une suite ou d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ équivaut à la convergence de chacune de ses composantes (dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$).
– Convergence des suites ou fonctions réelles monotones.
– Suites réelles adjacentes ; principe des segments emboîtés. Condition de Cauchy, critère général de convergence de Cauchy.
– Comparaison des suites et fonctions usuelles.

3. Séries

– Espace vectoriel des séries à termes complexes ; suite des sommes partielles d'une série. Sous-espace vectoriel des séries convergentes ; somme, suite des restes d'une série convergente.
– Série absolument convergente, suite sommable ; inégalité triangulaire. Si une série est absolument convergente, elle est convergente.
– Séries à termes positifs : principe de comparaison, comparaison logarithmique, séries géométriques, critères de Cauchy et de d'Alembert.
– Séries à termes positifs décroissants : critère de condensation de Cauchy, séries de Riemann.
– Développements décimaux.
– Rayon de convergence d'une série entière.
– Critère de Leibniz pour les séries réelles alternées, signe et majoration des restes.

4. Propriétés globales des fonctions continues

– Théorème des valeurs intermédiaires.
– Caractérisation des homéomorphismes d'un intervalle sur un intervalle.
– Toute fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie et continue sur un segment est bornée ; si de plus elle est à valeurs réelles ($d = 1$), elle atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.

5. Fonctions dérivables

– Dérivabilité en un point, dérivabilité à droite, à gauche. Combinaison linéaire, produit, quotient, composée de fonctions dérivables en un point.
– Fonctions dérivables, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle. Fonctions n fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.
– Dérivabilité et dérivées des fonctions usuelles.
– Théorème de Rolle, formule des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles. Inégalité des accroissements finis. Théorème de prolongement de la dérivée. Inégalité de Taylor-Lagrange.
– Caractérisation des fonctions constantes, monotones. Caractérisation des difféomorphismes d'intervalles.
– Fonctions à valeurs réelles convexes de classe $\mathcal{C}^2$; inégalité de convexité ; inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young, inégalité arithmético-géométrique.
– Résolution numérique d'une équation par la méthode de Newton, convergence quadratique.

6. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

– Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment, propriétés usuelles.
– Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier.
– Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Linéarité, additivité et positivité de l'intégrale. Sommes de Riemann.
– Inégalité de la moyenne.
– Théorème fondamental. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Primitive sur un intervalle d'une fonction continue par morceaux.
– Formule de changement de variable. Formule d'intégration par parties. Formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale.
– Exemples de calcul d'intégrales et de primitives.
– Intégration numérique : étude et comparaison des méthodes des rectangles et des trapèzes.

7. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque

– Définition d'une intégrale (« impropre ») convergente.
– Intégrale absolument convergente, fonction sommable ou intégrable sur un intervalle ; inégalité de la moyenne. Si une intégrale est absolument convergente, elle est convergente.
– Principe de comparaison pour les fonctions positives. Étude de l'intégrabilité sur $]0, 1]$ ou sur $[1, +\infty[$ des fonctions de référence usuelles : $x \mapsto e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $x \mapsto x^p$ ($p \in \mathbb{R}$), $x \mapsto |\ln x|$.

– Comparaison de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ et de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ pour une fonction $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ positive et décroissante.
– Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque.
– Fonctions complexes de carré intégrable ; inégalité de Cauchy-Schwarz.
– Exemples d'intégrales semi-convergentes.

8. Calculs asymptotiques

– Relations de comparaisons, notations de Landau. Développements limités.
– Formule de Taylor-Young.
– Sommation et intégration des relations de comparaison.
– Exemples de calculs asymptotiques. Formule de Stirling.

Commentaires

Le contenu de cette partie est organisé en sections suivant un ordre thématique qui n'est pas le seul possible et ne se veut en aucun cas un plan de cours. Diverses progressions sont envisageables ; on peut par exemple
– dissocier le cas discret du cas continu dans l'étude de la convergence ;
– associer l'étude des suites à celle des propriétés fondamentales des nombres réels et rapprocher en particulier le principe des segments emboîtés de celui de la borne supérieure ;
– présenter simultanément les suites et les séries et mettre à profit les nombreux exemples où l'étude d'une suite (x_n) utilise de façon naturelle des techniques spécifiques aux séries, appliquées à la série de terme général $x_{n+1} - x_n$;
– ou bien au contraire différer l'étude des séries et les traiter parallèlement aux intégrales impropres ;
– faire précéder, au moins partiellement, l'étude de la dérivation par celle de l'intégration ;
– regrouper les propriétés locales des fonctions relatives à la continuité et à la dérivation, y compris la formule de Taylor-Young, et en dissocier nettement l'étude des propriétés globales des fonctions continues ou dérivables ;
– répartir l'étude des calculs asymptotiques sur les chapitres relatifs aux dérivées et aux intégrales, à titre d'applications des théorèmes fondamentaux et de révision de la pratique acquise dans la première période de l'année.

1. Nombres réels

Les nombres réels sont supposés connus. On rappelle leurs propriétés fondamentales sans pour autant adopter un point de vue axiomatique, en mettant l'accent sur le principe de la borne supérieure.

On peut introduire les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ pour formuler certaines propriétés des réels relatives à l'ordre ; il est à remarquer que les variables introduites par les quantificateurs sont « muettes » et que l'usage de ces derniers en tant qu'abréviations est donc non seulement inesthétique, mais le plus souvent incorrect du point de vue logique.

La norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$ est définie par la formule $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$ pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Il résulte de l'inégalité triangulaire que pour x et y dans $\mathbb{R}^d$, on a $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

2. Convergence dans $\mathbb{R}^d$

La notion de convergence dans $\mathbb{R}^d$ est décrite au moyen de la norme euclidienne usuelle, de façon intrinsèque. Toutes les définitions, les propriétés fondamentales et les démonstrations relatives à la convergence des suites ou des fonctions et à la dérivation et à l'intégration des fonctions seront données pour des suites ou fonctions à valeurs réelles de telle sorte qu'elles restent valables sans aucun changement pour des suites ou fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}^d$.

Le fait que la convergence d'une suite ou d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ soit équivalente à la convergence de chacune de ses composantes (dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$) donne lieu dans les sections suivantes à des énoncés analogues : par exemple, pour qu'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ soit dérivable, ou bien intégrable sur un intervalle donné, il faut et il suffit que ses composantes le soient ; la somme d'une série $\sum a_n$ à termes dans $\mathbb{R}^d$ est un élément de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées (dans la base canonique) s'obtiennent en sommant les composantes de la suite (a_n) ; de même, l'intégrale sur un intervalle donné d'une application f à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un élément de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont les intégrales sur l'intervalle considéré des composantes de l'application f.

Critère général de convergence de Cauchy : une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. La caractérisation séquentielle des limites permet d'étendre ce critère au cas des fonctions ; ainsi, la condition de Cauchy en b pour une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}^d$, avec $b \in]a, +\infty]$, à savoir

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c \in [a, b[\quad \forall\, x, x' \in [a, b[\quad x, x' > c \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

est nécessaire et suffisante pour que la limite $\lim_{x \to b} f(x)$ existe.

3. Séries

Une série à termes réels positifs est convergente si et seulement si l'ensemble des sommes finies de ses termes est majoré, auquel cas la borne supérieure de cet ensemble est égal à la somme de la série. Dans le cas où une série à termes positifs est divergente, il est pratique de convenir que sa somme est égale $+\infty$.

Une suite (a_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dite sommable si la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Inégalité triangulaire : pour toute suite sommable (a_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on a $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Soit (a_n) une suite de réels positifs ; critère de Cauchy : si la limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe et est strictement inférieure à 1 (resp. strictement supérieure à 1), alors la série $\sum a_n$ est convergente (resp. la suite (a_n) tend vers $+\infty$) ; critère de d'Alembert : si les a_n sont tous non nuls et si la limite $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ existe et est strictement inférieure à 1 (resp. strictement supérieure à 1), alors la série $\sum a_n$ est convergente (resp. la suite (a_n) tend vers $+\infty$).

Critère de condensation de Cauchy : si (a_n) est une suite décroissante de réels positifs, la série $\sum a_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum 2^n a_{2^n}$ l'est ; par exemple, la série de Riemann $\sum n^{-s}$ est convergente si et seulement si la série géométrique $\sum 2^{(1-s)n}$ l'est.

Développements décimaux : pour tout réel x strictement positif, il existe une suite (a_n) à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ telle que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x ; la suite des décimales (a_n) est uniquement déterminée si x n'est pas décimal. Développement décimal propre d'un nombre décimal.

Une série entière (à coefficients complexes) est présentée comme une série numérique de la forme $\sum a_n z^n$ dépendant du paramètre complexe z ; le rayon de convergence est défini par le théorème d'Abel : pour toute suite (a_n) donnée, il existe un unique élément R de $[0, +\infty]$ tel que la série $\sum a_n z^n$ soit convergente si $|z| < R$ et que la suite $(a_n z^n)$ ne soit pas bornée si $|z| > R$. Tout résultat relatif à la somme d'une série entière en tant que fonction du paramètre z est reporté à la deuxième année.

On considère sur quelques exemples l'utilisation de la formule de sommation par parties (ou transformation d'Abel)

$$(a_0 - a_1)b_1 + (a_1 - a_2)b_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)b_n = a_0 b_1 - a_1(b_1 - b_2) - a_2(b_2 - b_3) - \cdots - a_{n-1}(b_{n-1} - b_n) - a_n b_n$$

pour ramener l'étude d'une série semi-convergente à celle d'une série absolument convergente.

4. Propriétés globales des fonctions continues

Théorème des valeurs intermédiaires : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si y est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = y$. Il en résulte que l'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue réelle définie sur I est un intervalle.

Pour qu'une application $f : I \to J$ d'un intervalle I dans un intervalle J soit un homéomorphisme de I sur J, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :

- la fonction f est strictement monotone et surjective,
- la fonction f est continue et bijective.

On montre que l'image d'un chemin fini $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ est bornée en appliquant le principe de la borne supérieure ou celui des segments emboîtés ; si de plus f est à valeurs réelles ($d = 1$), $f([a, b])$ est un segment.

5. Fonctions dérivables

Formule de Leibniz : si f et g sont des fonctions n fois dérivables en un point x de $\mathbb{R}$, alors fg est n fois dérivable en x et on a $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

Pour qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I induise un difféomorphisme de I sur l'intervalle $f(I)$, il faut et il suffit que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' ne s'annule pas.

6. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ telle que $|f(t) - \phi(t)| < \varepsilon$ quel que soit $t \in [a, b]$; on peut énoncer cette propriété (équivalente au théorème de Heine qui n'est pas au programme) en disant que la fonction f est réglée ; on la montre en appliquant le principe de la borne supérieure ou celui des segments emboîtés.

Définition de l'intégrale $\int_a^b f$ d'une fonction continue par morceaux $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$: si (ϕ_n) est une suite de fonctions en escalier telle que $\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - \phi_n(t)| < 1/n$ pour tout n, alors la suite $(\int_a^b \phi_n)$ est de Cauchy et sa limite est indépendante du choix des ϕ_n ; on pose $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n$. Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier (y compris l'inégalité de la moyenne ou l'inégalité de Cauchy-Schwarz) s'étendent par passage à la limite aux fonctions continues par morceaux.

Soit $f : I \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue par morceaux ; on appelle primitive de f sur I toute fonction continue $F : I \to \mathbb{R}^d$ telle qu'en tout point de continuité x de f, F soit dérivable de dérivée égale à $f(x)$; si c est un point de I, toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto C + \int_c^x f$ avec $C \in \mathbb{R}^d$.

Pour ce qui est du calcul des primitives, le seul exposé systématique concerne les fonctions rationnelles ; il utilise la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Parmi les exemples à traiter figurent la primitivation des polynômes trigonométriques par linéarisation, l'utilisation du paramétrage rationnel de $\mathbb{U}\setminus\{-1\}$ pour ramener l'intégrale d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus à celle d'une fonction rationnelle et le calcul des intégrales de Wallis.

7. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque

L'exposé met en relief l'analogie entre suites et fonctions sommables et entre séries et intégrales convergentes.

Soit I un intervalle dont les extrémités inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement, $f : I \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue par morceaux et F une primitive de f sur I ; on dit que f admet une intégrale convergente sur I si F admet des limites en a et en b, auquel cas on pose $\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$; si par exemple $I = [a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$, f admet une intégrale convergente si et seulement si la limite $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f$ existe, auquel cas cette limite est la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$.

Si la fonction f est à valeurs réelles ($d = 1$) positives, elle admet une intégrale convergente sur I si et seulement si l'ensemble des intégrales de f sur un segment contenu dans I est majoré, auquel cas la borne supérieure de cet ensemble est égale à l'intégrale $\int_a^b f$. Dans le cas où f est à valeurs réelles positives et où elle n'admet pas d'intégrale convergente sur I, il est pratique d'écrire $\int_a^b f = +\infty$.

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}^d$ admet une intégrale absolument convergente sur I ou encore que f est sommable ou intégrable sur I si $\int_I |f| < +\infty$; dans ce cas, f admet une intégrale convergente sur I, qu'on note $\int_a^b f$ ou $\int_I f$. Inégalité triangulaire : si f est sommable sur I, on a $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

On souligne l'importance du principe de comparaison pour ramener l'étude de la sommabilité d'une fonction à l'estimation de son comportement aux bornes de l'intervalle d'intégration.

On considère sur quelques exemples l'utilisation de la formule d'intégration par parties pour ramener l'étude d'une intégrale semi-convergente à celle d'une intégrale absolument convergente.

8. Calculs asymptotiques

Les résultats relatifs à la sommation et à l'intégration des relations de comparaison généralisent un théorème classique relatif aux moyennes de Cesàro.

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ pour $n \to \infty$.

IV - Entiers - Polynômes - Algèbre linéaire

Objectifs

Cette partie développe l'arithmétique des entiers et des polynômes et introduit aux fondements de l'algèbre linéaire en dimension finie. Les algorithmes d'Euclide (division euclidienne) et de Gauss (méthode du pivot) y ont un rôle central : ils fournissent des démonstrations alternatives constructives des résultats principaux, tels que le théorème de Bézout, le théorème du rang, etc.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- *sachent appliquer l'algorithme d'Euclide à la détermination d'un pgcd ou d'une relation de Bézout dans l'anneau des entiers ou celui des polynômes à coefficients complexes ;*
- *aient assimilé la notion d'espace vectoriel et les procédés usuels de construction d'espaces vectoriels ;*
- *connaissent les conséquences du théorème de la base incomplète (définition de la dimension, théorème du rang) ;*
- *sachent représenter matriciellement une famille finie de vecteurs ou de formes linéaires et une application linéaire dans une base donnée et utiliser les formules de changement de bases ;*

– *maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un problème (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;*
– *aient compris les mécanismes de dualité (base / système de coordonnées, équations cartésiennes / équations paramétriques, etc.) ;*
– *puissent manipuler les permutations et calculer leur signature ;*
– *connaissent la théorie des déterminants.*

Contenu

0. Vocabulaire relatif aux structures algébriques

– Groupe, groupe abélien, morphisme de groupes, sous-groupe, noyau et image d'un morphisme de groupes. Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme.
– Anneau, anneau commutatif, anneau intègre. Corps, corps commutatif.
– Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sous-espace vectoriel, application linéaire, noyau et image d'une application linéaire.
– Algèbre sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, algèbre avec unité ; morphisme d'algèbres avec unité.

1. Combinatoire élémentaire

– Ensemble fini, nombre d'éléments ou cardinal d'un ensemble fini. Critères usuels de finitude. Une application d'un ensemble fini dans lui-même est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.
– Sommes ou produits finis ; sommation par paquets ; développement d'un produit de sommes dans un anneau commutatif. Formule du binôme.
– Problèmes de dénombrement. Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis (formule du crible). Nombre d'applications, d'injections, de bijections d'un ensemble fini dans un autre ; nombre de parties, de parties de cardinal donné d'un ensemble fini. Relations usuelles entre coefficients binomiaux.

2. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

– Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Nombres premiers ; lemme d'Euclide. Théorème d'Euclide ; théorème fondamental de l'arithmétique.
– Division euclidienne. Plus grand commun diviseur (pgcd), plus petit commun multiple (ppcm) ; entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, lemme de Gauss. Algorithme d'Euclide.
– Numération décimale, numération binaire.

3. Polynômes et fractions rationnelles

– Algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Degré, coefficient dominant. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$.
– Relation de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes irréductibles, polynômes associés ; lemme d'Euclide. Décomposition canonique en produit de facteurs irréductibles.
– Division euclidienne. Pgcd, ppcm, polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, algorithme d'Euclide.
– Développement d'un élément de $\mathbb{K}[X]$ suivant les puissances de $X - a$, avec $a \in \mathbb{K}$. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$, formule de Leibniz ; formule de Taylor.
– Fonction polynômiale associée à un polynôme ; isomorphisme entre l'algèbre des fonctions polynômiales sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}[X]$.
– Équation algébrique ; ordre de multiplicité d'une racine (ou d'un zéro) d'un polynôme. Polynôme scindé ; relations de Viète entre racines et coefficients d'un polynôme. Théorème de d'Alembert-Gauss ; éléments irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}(X)$.
– Interpolation de Lagrange.
– Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$; fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Degré, valuation en un point de $\mathbb{K}$ d'une fraction rationnelle ; zéros, pôles. Partie entière, partie polaire relative à un pôle. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{K}[X]$.

4. Structure d'espace vectoriel

– Espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sous-espace vectoriel, application linéaire. Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire ; noyau, image d'une application linéaire. Isomorphisme.
– Produit d'une famille non vide d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Espace vectoriel E^A des applications d'un ensemble non vide A dans un espace vectoriel E. Sous-espace vectoriel $\mathcal{L}(E;F)$ de F^E ; espace vectoriel E^* (dual de E) des formes linéaires sur E.
– Application bilinéaire. Bilinéarité de la composition $\mathcal{L}(E;F) \times \mathcal{L}(F,G) \to \mathcal{L}(E,G)$, $(f,g) \mapsto g \circ f$. Algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E.
– Intersection, somme d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E. Famille de sous-espaces vectoriels en somme directe. Sous-espaces supplémentaires, projecteurs ; famille de projecteurs canoniquement associée à une décomposition en somme directe finie. Droite, hyperplan.
– Combinaison linéaire, sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel. Partie ou famille génératrice, libre (famille d'éléments linéairement indépendants). Base, coordonnées dans une base.

5. Théorie de la dimension finie

– Espace vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire finiment engendré ; théorème de la base incomplète, existence d'une base, définition de la dimension ; si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension d, à toute base de E est canoniquement associé un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^d$.
– Dimension d'un sous-espace vectoriel ou affine d'un espace vectoriel de dimension finie. Rang d'une famille de vecteurs de rang fini. Caractérisation d'une base en dimension finie. Caractérisation d'un système de coordonnées, base duale.
– Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie ; caractérisation par la dimension d'une somme directe finie de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Sous-espace vectoriel de codimension finie, existence d'un supplémentaire. Rang d'une application linéaire de rang fini ; théorème du rang : le rang d'une application linéaire est égal à la codimension de son noyau. Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.

6. Calcul matriciel

– Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Multiplication des matrices, propriétés de bilinéarité et d'associativité. Algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées à n lignes à coefficients dans $\mathbb{K}$; groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$; sous-algèbre des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures.
– Matrice d'un vecteur ou d'une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E (de dimension finie) dans une base de E ; matrice d'une forme linéaire ou d'une famille finie de formes linéaires sur E dans une base de E ; matrice d'une application linéaire de E dans F dans des bases de E et F. Calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
– Matrice de passage d'une base à une autre ; formules de changement de bases. Matrices carrées semblables.
– Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.
– Matrices équivalentes ; caractérisation des classes de matrices équivalentes par le rang.
– Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée en termes de changement de système de coordonnées (de base) ; interprétation duale des opérations élémentaires sur les colonnes.

7. Déterminants

– Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, de transpositions ; génération de $\mathfrak{S}_n$ par les transpositions. Existence d'un unique morphisme de groupes non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{1, -1\}$; exemples de calcul de la signature. Sous-groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.
– Déterminant det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, existence et caractérisation du déterminant ; formule de développement ; développement suivant une ligne ou une colonne. Multiplicativité du déterminant, invariance par transposition des matrices, par similitude. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Sous-groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
– Déterminant de Vandermonde. Exemples de calculs de déterminants.

– Comatrice $\operatorname{Com} M$ d'une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; formule $M({}^t\operatorname{Com} M) = ({}^t\operatorname{Com} M)M = (\det M)I_n$. Formules de Cramer.
– Droite des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n. Déterminant d'un endomorphisme. Interprétation géométrique. Caractérisation des bases, des automorphismes.
– Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

8. Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$

– Caractérisations d'une isométrie linéaire (ou automorphisme orthogonal) de $\mathbb{R}^n$. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$, groupe orthogonal spécial $\mathrm{SO}(n)$. Déterminant (noté Det) d'une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ calculé dans une base orthonormale.
– Toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ est une transformation affine. Expression d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$ comme composée de réflexions. Déplacements.
– Rotations et réflexions linéaires de $\mathbb{R}^2$; morphisme de groupe canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{SO}(2)$.
– Tout déplacement de $\mathbb{R}^2$ est soit une translation, soit une rotation affine. Composition des rotations affines.
– Rotations, symétries orthogonales, réflexions linéaires. Rotation $r_{e,\theta}$ d'axe porté et orienté par e et d'angle orienté θ ; interprétation géométrique de la formule de Rodrigues $r_{e,\theta} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin\theta)a_e + (1-\cos\theta)a_e^2$ où a_e est l'endomorphisme $v \mapsto e \times v$ de $\mathbb{R}^3$; théorème d'Euler, détermination de l'axe et de l'angle orientés d'une rotation donnée par sa matrice dans la base canonique. Classification des rotations et des anti-rotations.
– Tout déplacement de $\mathbb{R}^3$ est soit une translation, soit une rotation affine, soit un vissage.

Commentaires

0. Vocabulaire relatif aux structures algébriques

Cette section présente les structures algébriques utiles à l'étude du programme et ne fait en principe l'objet d'aucun exposé systématique ; les notions sont introduites au fur et à mesure des besoins.

1. Combinatoire élémentaire

Il s'agit d'une brève initiation aux techniques élémentaires de la combinatoire.

3. Polynômes et fractions rationnelles

L'anneau des polynômes est étudié du point de vue arithmétique ; nombre de résultats (relatifs à la division euclidienne, à l'interpolation, à la décomposition en éléments simples, etc.) pourront ensuite être retrouvés à l'aide de techniques d'algèbre linéaire.

Le théorème de d'Alembert-Gauss est admis.

Si P est un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$, de la forme $P = \prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{\mu_i}$, alors la décomposition en éléments simples de P'/P est $\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{X-a_i}$.

4. Structure d'espace vectoriel

La notion d'espace vectoriel est introduite de manière abstraite ; elle est motivée par les exemples d'espaces de fonctions ou de polynômes déjà rencontrés ainsi que par l'étude de $\mathbb{R}^d$ faite en début d'année.

5. Théorie de la dimension finie

L'essentiel des résultats découle de l'étude faite dans la partie II.

6. Calcul matriciel

La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant l'identité $\operatorname{tr}(M_1M_2) = \operatorname{tr}(M_2M_1)$; il en résulte que la trace est un invariant de similitude.